Hong Kong Mathematics Olympiad (2013 / 2014)

Heat Event (Individual)

香港數學競賽 (2013 / 2014)

初賽項目(個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

1. 已知 a、b、$c>0$ 且 $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=2\\ \dfrac{\sqrt{bc}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=3\\ \dfrac{\sqrt{ca}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=5\end{cases}$，求 $\dfrac{a}{\sqrt{bc}}$ 的值。

   Given that $a,b,c>0$ and $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=2\\ \dfrac{\sqrt{bc}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=3\\ \dfrac{\sqrt{ca}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=5\end{cases}$. Find the value of $\dfrac{a}{\sqrt{bc}}$.

2. 已知 $a=2014x+2011$，$b=2014x+2013$ 及 $c=2014x+2015$。求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值。

   Given that $a=2014x+2011$, $b=2014x+2013$ and $c=2014x+2015$. Find the value of $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$.

3. 如圖一所示，T 為等邊三角形 PQR 內一點，其中 $TP=3$ 、 $TQ=3\sqrt{3}$ 及 $TR=6$。求 $\angle PTR$。

   As shown in Figure 1, a point T lies in an equilateral triangle PQR such that $TP=3$, $TQ=3\sqrt{3}$ and $TR=6$. Find $\angle PTR$.

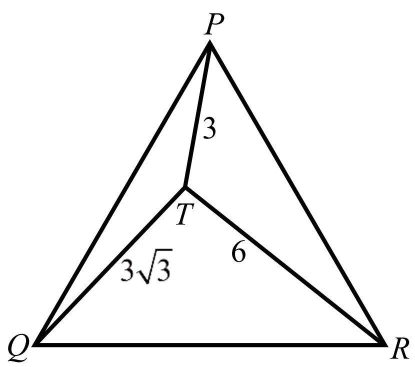

Figure 1
圖一

4. 設 α 及 β 為二次方程 $x^2-14x+1=0$ 的根。求 $\frac{\alpha^2}{\beta^2+1}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+1}$ 的值。

Let α and β be the roots of the quadratic equation $x^2-14x+1=0$. Find the value of $\frac{\alpha^2}{\beta^2+1}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+1}$.

5. 如圖二所示，$ABCD$ 為圓內接四邊形，其中 $AD=5$、$DC=14$、$BC=10$ 及 $AB=11$。求四邊形 $ABCD$ 的面積。

As shown in Figure 2, $ABCD$ is a cyclic quadrilateral, where $AD=5$, $DC=14$, $BC=10$ and $AB=11$. Find the area of quadrilateral $ABCD$.

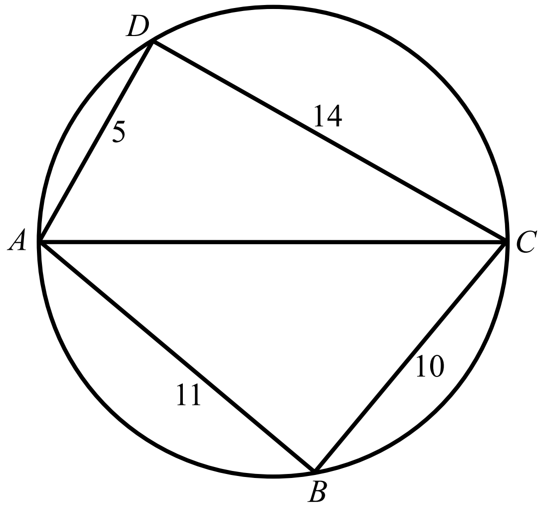

Figure 2
圖二

6. 設 n 為正數，且 $n<1000$。若 $(n-1)^2$ 整除 $(n^{2014}-1)$，求 n 的最大值。

Let n be a positive number and $n<1000$. If $(n^{2014}-1)$ is divisible by $(n-1)^2$, find the maximum value of n.

7. 若 $x^3+x^2+x+1=0$，求 $x^{-2014}+x^{-2013}+x^{-2012}+\cdots+x^{-1}+1+x+x^2+\cdots+x^{2013}+x^{2014}$ 的值。

If $x^3+x^2+x+1=0$, find the value of $x^{-2014}+x^{-2013}+x^{-2012}+\cdots+x^{-1}+1+x+x^2+\cdots+x^{2013}+x^{2014}$.

8. 設 $\overline{xy}=10x+y$。若 $\overline{xy}+\overline{yx}$ 為一個平方數，這樣的數有多少個？

Let $\overline{xy}=10x+y$. If $\overline{xy}+\overline{yx}$ is a square number, how many numbers of this kind exist?

9. 已知 x 、 y 及 z 為正實數，且 $xyz=64$。設 $S=x+y+z$，求當 $4x^2+2xy+y^2+6z$ 的值為最小時，S 的值。

Given that x, y and z are positive real numbers such that $xyz=64$. If $S=x+y+z$, find the values of S when $4x^2+2xy+y^2+6z$ is a minimum.

10. 已知ΔABC為一銳角三角形，其中$\angle A>\angle B>\angle C$。若$x°$為$\angle A-\angle B$ 、 $\angle B-\angle C$ 及 $90°-\angle A$中的最小值，求x的最大值。

Given that ΔABC is an acute triangle, where $\angle A>\angle B>\angle C$. If $x°$ is the minimum of $\angle A-\angle B$, $\angle B-\angle C$ and $90°-\angle A$, find the maximum value of x.

完

END